

# ***Recollement de maillages dans les problèmes d'électromagnétisme résolus par la méthode des éléments finis***

L2EP (T. Henneron)  
LGEP (G. Krebs)

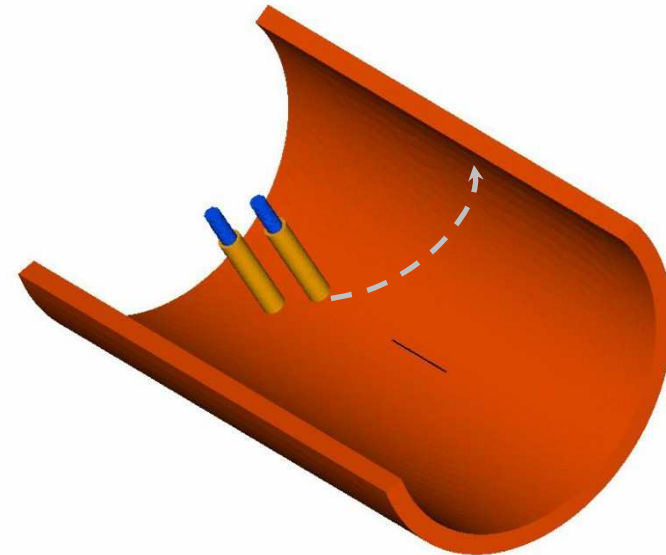


# Contexte

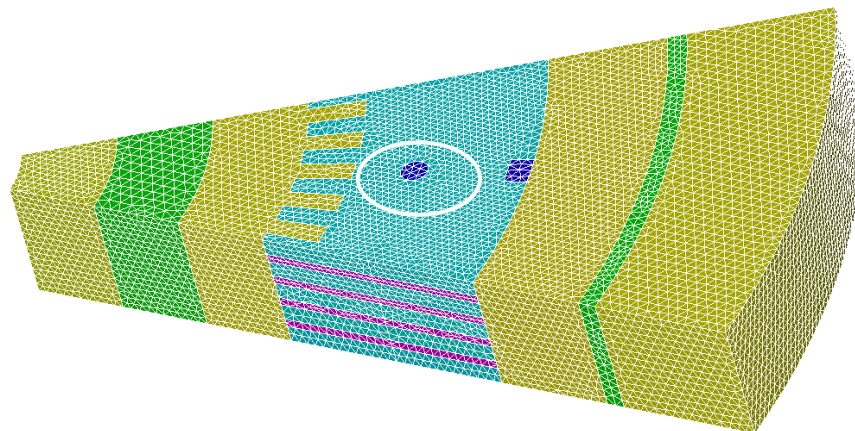
- ❑ Développer dans le cadre des problèmes multi échelles, mouvements complexes, calculs parallèles



*Courants induits dans une faible épaisseur de peau*



*Mouvement hélicoïdal*



*Modélisation de défauts de faibles dimensions*

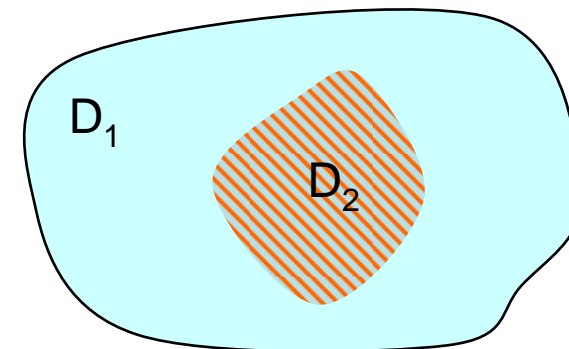
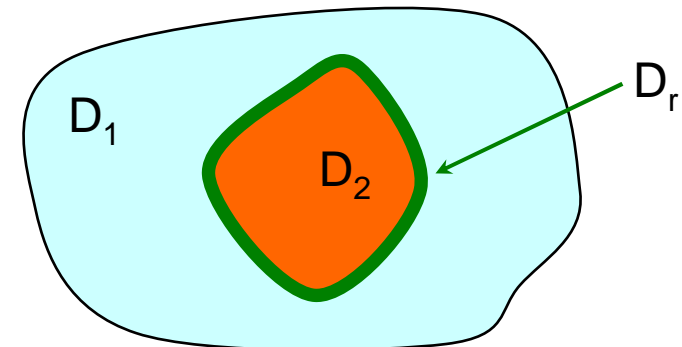
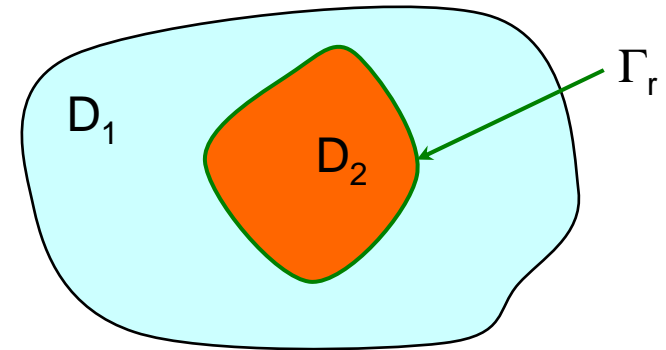
# Contexte

## □ 3 Familles de méthode

- Recollement « surfacique » :  
multiplicateurs de Lagrange (L2ep),  
Mortar (Lgep, L2ep)

- Recollement « volumique » :  
Overlapping (L2ep, Lgep)

- Recollement « recouvrement » :  
Méthode des perturbations



## Contexte

- ❑ Lagrange/Mortar (magnétostatique/magnétodynamique formulations duales en potentiels)
- ❑ Overlapping (magnétostatique, formulation scalaire)

⇒ Mise à niveau de la méthode Overlapping par rapport aux méthodes Lagrange et Mortar

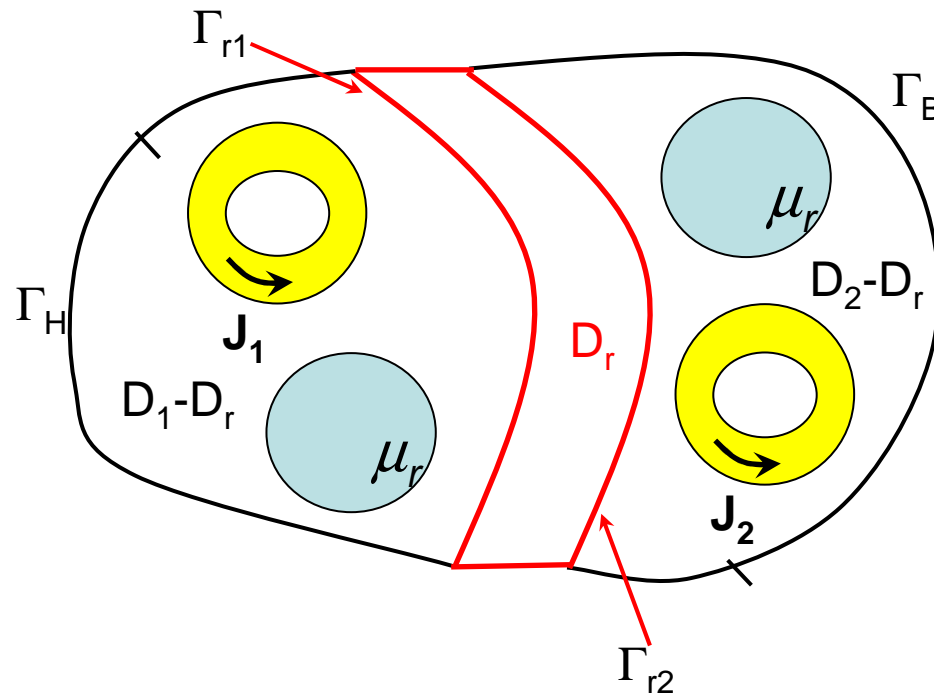
# Plan



- ❑ Problème magnétostatique
- ❑ Problème magnétodynamique
- ❑ Exemples d'application
- ❑ Bilan

# Problème magnétostatique

## □ Domaine d'étude



Equations de Maxwell :

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \text{ avec } \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \text{ avec } \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_H$$

Loi de comportement :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

# Problème magnétostatique

## □ Formulation scalaire $H_s$ - $\Omega$

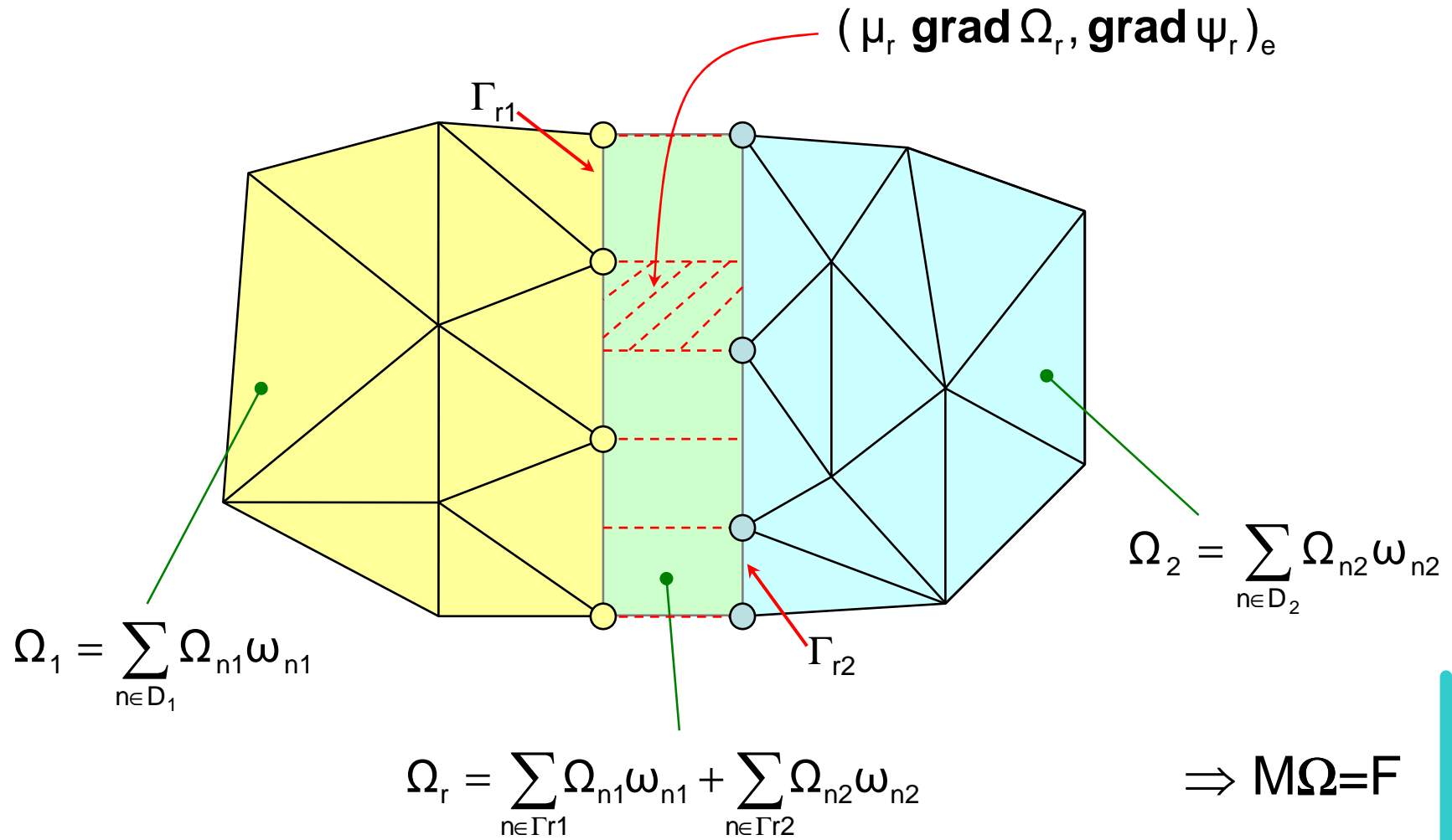
On définit :  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \mathbf{grad} \Omega$  et  $\mathbf{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{J}$   
avec  $\Omega = \text{cst}$  sur  $\Gamma_H$  et  $\mathbf{H}_s \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_H$

et on résout

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{B} = 0 &\Rightarrow (\mu \mathbf{grad} \Omega, \mathbf{grad} \psi)_D = (\mu \mathbf{H}_s, \mathbf{grad} \psi)_D \\ &\Rightarrow (\mu_1 \mathbf{grad} \Omega_1, \mathbf{grad} \psi_1)_{D_1 - D_r} + (\mu_2 \mathbf{grad} \Omega_2, \mathbf{grad} \psi_2)_{D_2 - D_r} \\ &\quad + (\mu_r \mathbf{grad} \Omega_r, \mathbf{grad} \psi_r)_{D_r} = (\mu \mathbf{H}_s, \mathbf{grad} \psi)_{D_1 \cup D_2} \end{aligned}$$

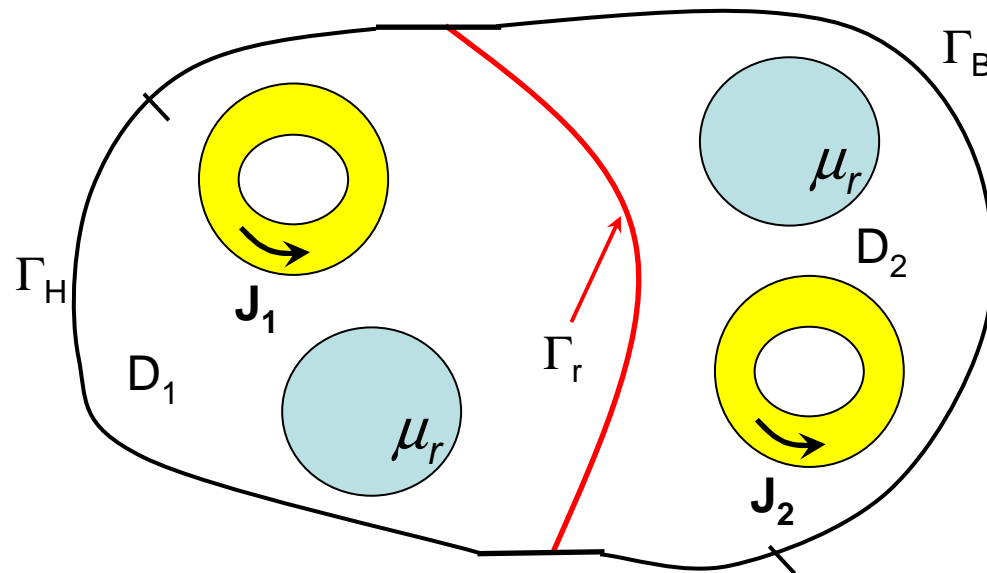
# Problème magnétostatique

En terme de discrétisation,



# Problème magnétostatique

- Comparaison avec les méthodes Lagrange et Mortar



Equation de recollement :

$$[C][\Omega_{1\Gamma}] = [D][\Omega_{2\Gamma}]$$

avec  $C(m_1, n_1) = \langle \omega_{m_1}, \omega_{n_1} \rangle_{\Gamma_r}$

et  $D(n_2, n_1) = \langle \omega_{n_2}, \omega_{n_1} \rangle_{\Gamma_r}$

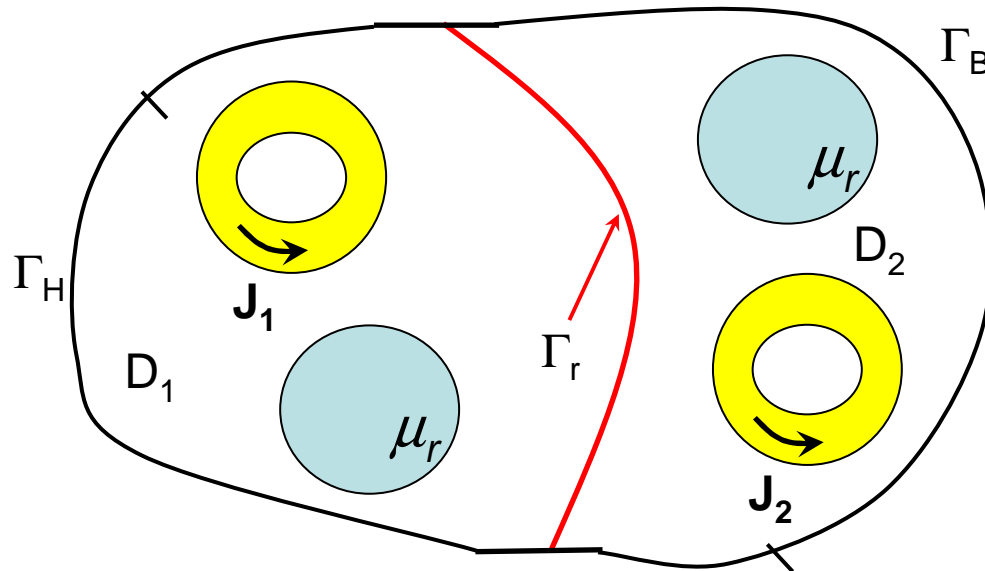
$(m_1, n_1) \in D_1$  et  $n_2 \in D_2$

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_{1\Gamma}^t & 0 & 0 & 0 \\ M_{1\Gamma} & M_{1\Gamma\Gamma} & 0 & 0 & C^t \\ 0 & 0 & M_2 & M_{2\Gamma}^t & 0 \\ 0 & 0 & M_{2\Gamma} & M_{2\Gamma\Gamma} & -D^t \\ 0 & C & 0 & -D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_{1\Gamma} \\ \Omega_2 \\ \Omega_{2\Gamma} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*Système matriciel par la méthode des multiplicateurs*

# Problème magnétostatique

- Comparaison avec les méthodes Lagrange et Mortar



Equation de recollement :

$$[C][\Omega_{1\Gamma}] = [D][\Omega_{2\Gamma}]$$

avec  $C(m_1, n_1) = \langle \omega_{m_1}, \omega_{n_1} \rangle_{\Gamma_r}$

et  $D(n_2, n_1) = \langle \omega_{n_2}, \omega_{n_1} \rangle_{\Gamma_r}$

$(m_1, n_1) \in D_1$  et  $n_2 \in D_2$

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_{1\Gamma}^t C^{-1} D & 0 \\ (C^{-1} D)^t M_{1\Gamma} & M_{2\Gamma\Gamma} + (C^{-1} D)^t M_{1\Gamma\Gamma} C^{-1} D & M_{2\Gamma}^t \\ 0 & M_{2\Gamma} & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_{2\Gamma} \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

*Système matriciel par la méthode Mortar*

# Problème magnétostatique

## □ Formulation vectorielle A

On définit :  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  avec  $\mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_B$

et on résout

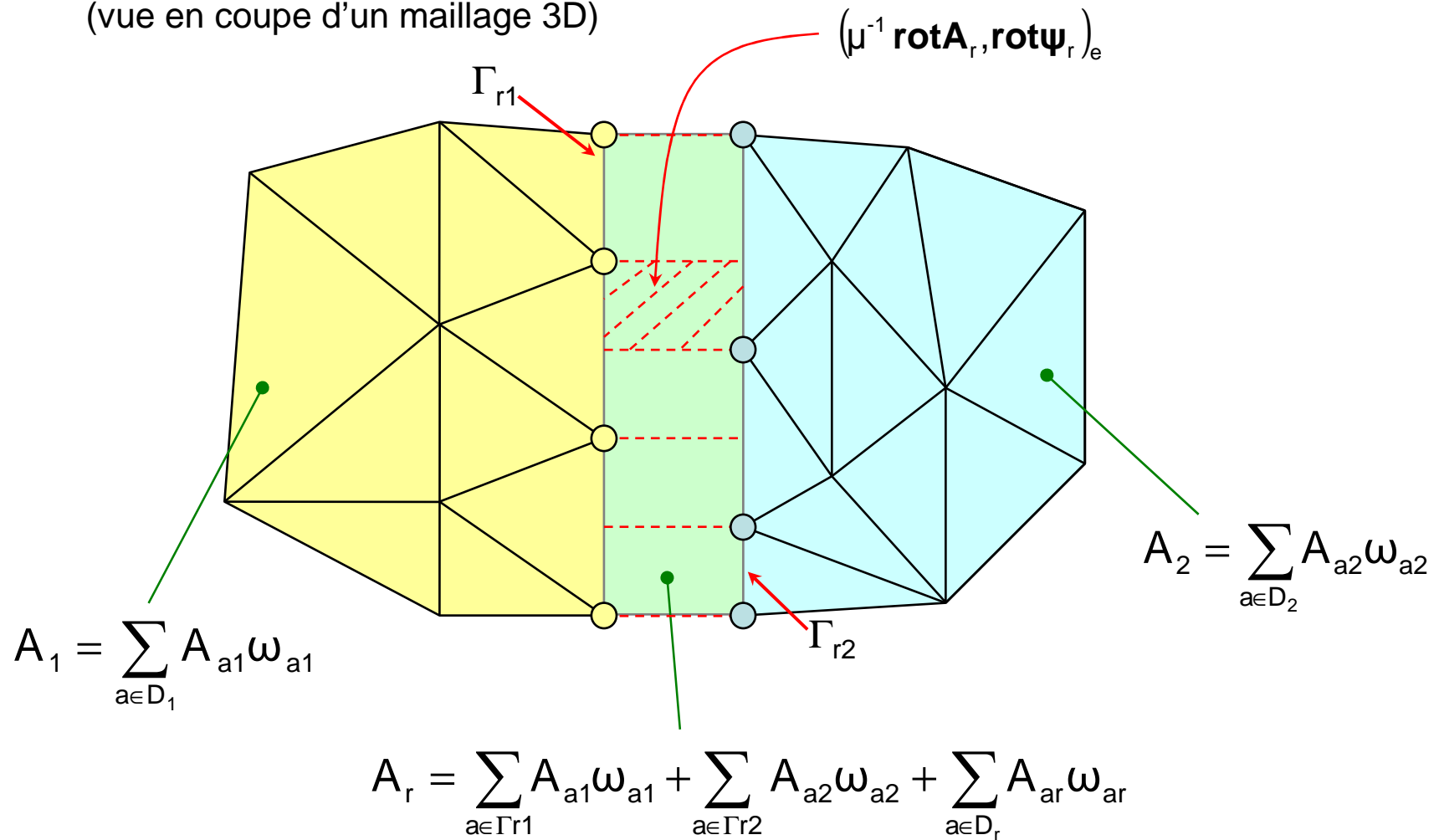
$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \Rightarrow (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}, \text{rot } \boldsymbol{\psi})_D = (\mathbf{J}, \text{rot } \boldsymbol{\psi})_D$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_1, \text{rot } \boldsymbol{\psi}_1)_{D_1 - D_r} + (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_2, \text{rot } \boldsymbol{\psi}_2)_{D_2 - D_r} \\ & + (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_r, \text{rot } \boldsymbol{\psi}_r)_{D_r} = (\mathbf{J}, \text{rot } \boldsymbol{\psi})_{D_1 \cup D_2} \end{aligned}$$

# Problème magnétostatique

En terme de discrétisation,

(vue en coupe d'un maillage 3D)



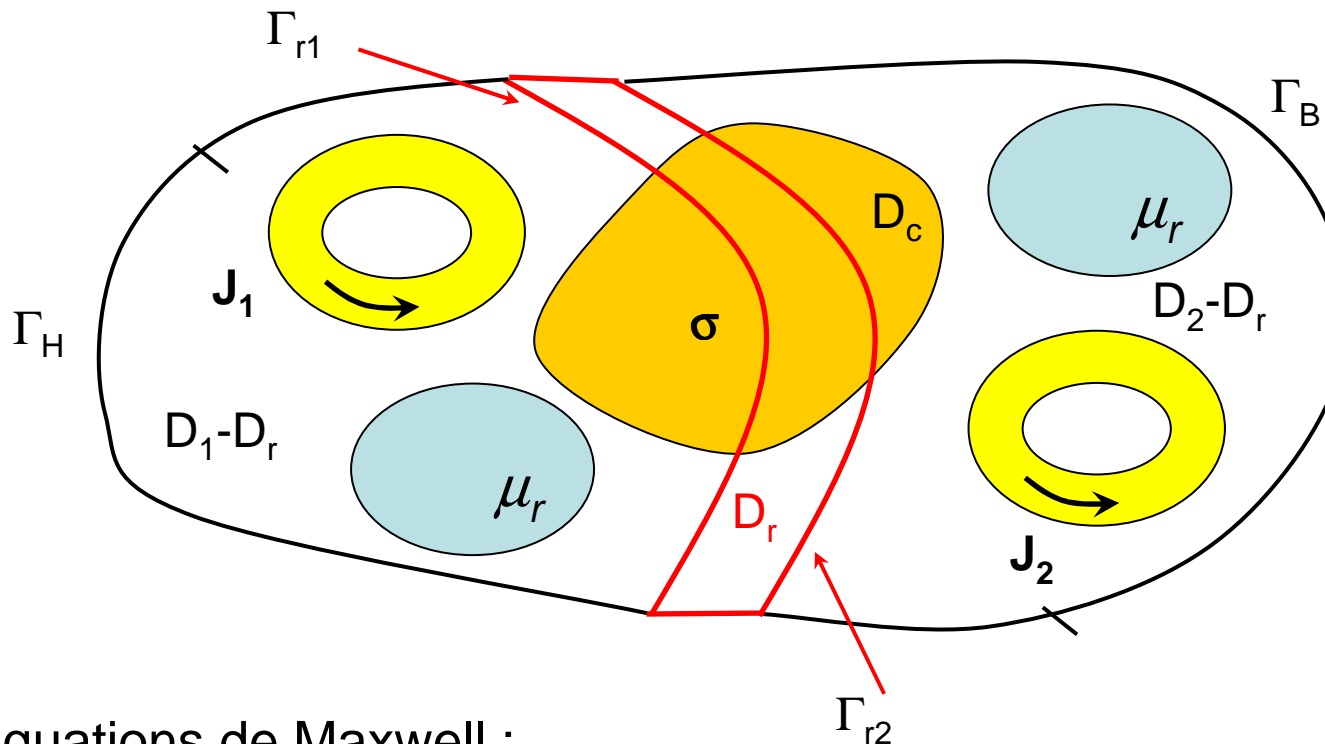
# Plan



- Problème magnétostatique
- Problème magnétodynamique
- Exemples d'application
- Bilan

# Problème magnétodynamique

## □ Domaine d'étude



Equations de Maxwell :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{\text{ind}} \text{ avec } \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_H$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \text{ avec } \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_E$$

Lois de comportement :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J}_{\text{ind}} = \sigma \mathbf{E}$$

# Problème magnétodynamique

## □ Formulation vectorielle $\mathbf{A}^*$

On définit :  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}^*$  et  $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}^*$

et on résout

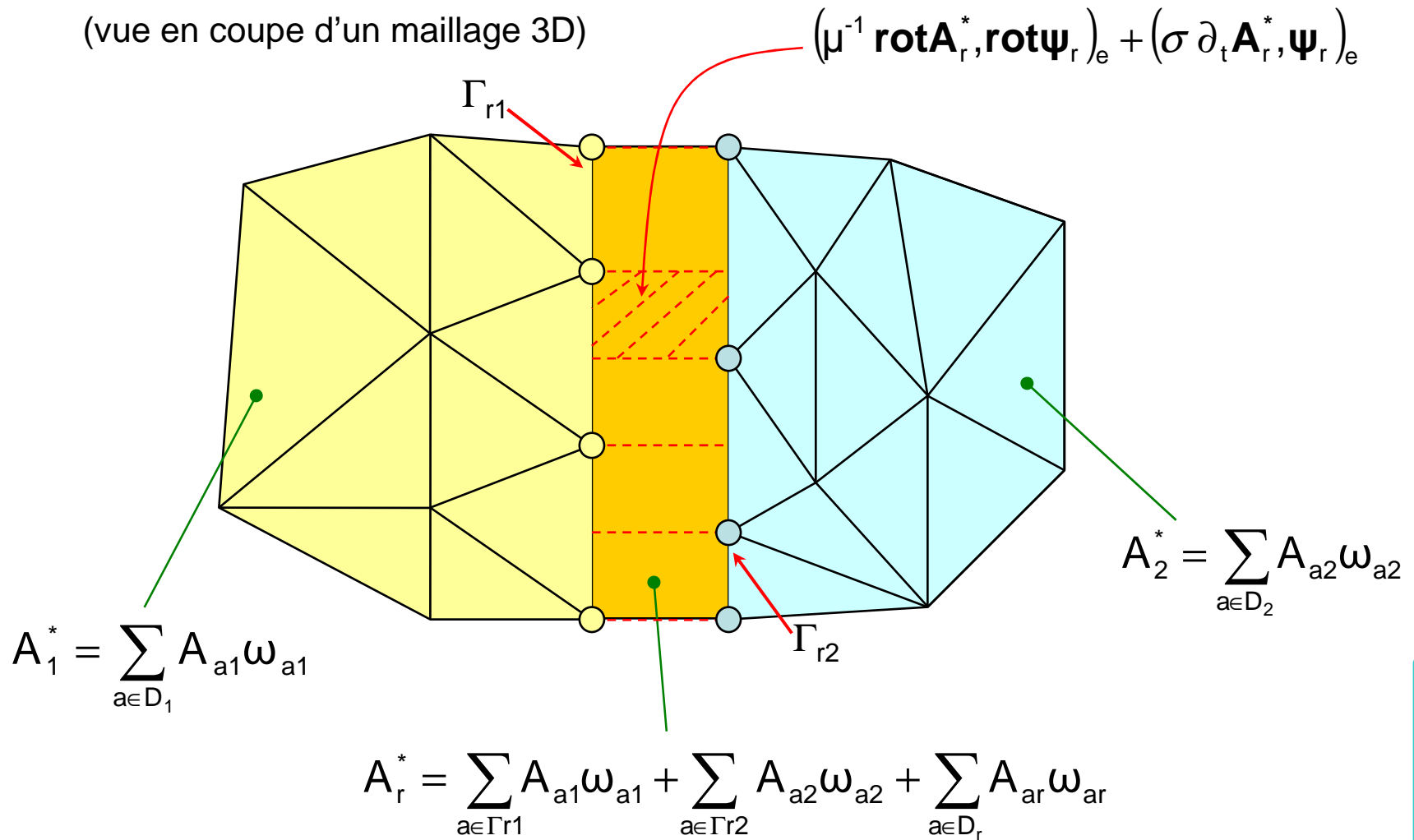
$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{\text{ind}} \Rightarrow (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}^*, \text{rot } \boldsymbol{\psi})_{\text{D}} + (\sigma \partial_t \mathbf{A}^*, \boldsymbol{\psi})_{\text{D}_c} = (\mathbf{J}, \text{rot } \boldsymbol{\psi})_{\text{D}}$$

$$\begin{aligned} & (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_1^*, \text{rot } \boldsymbol{\psi}_1)_{\text{D}_1 - \text{D}_r} + (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_2^*, \text{rot } \boldsymbol{\psi}_2)_{\text{D}_2 - \text{D}_r} + (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_r^*, \text{rot } \boldsymbol{\psi}_r)_{\text{D}_r} \\ & + (\sigma \partial_t \mathbf{A}_1^*, \boldsymbol{\psi}_1)_{\text{D}_1 - \text{D}_r} + (\sigma \partial_t \mathbf{A}_2^*, \boldsymbol{\psi}_2)_{\text{D}_2 - \text{D}_r} + (\sigma \partial_t \mathbf{A}_r^*, \boldsymbol{\psi}_r)_{\text{D}_r} = (\mathbf{J}, \text{rot } \boldsymbol{\psi})_{\text{D}_1 \cup \text{D}_2} \end{aligned}$$

# Problème magnétodynamique

En terme de discrétisation,

(vue en coupe d'un maillage 3D)



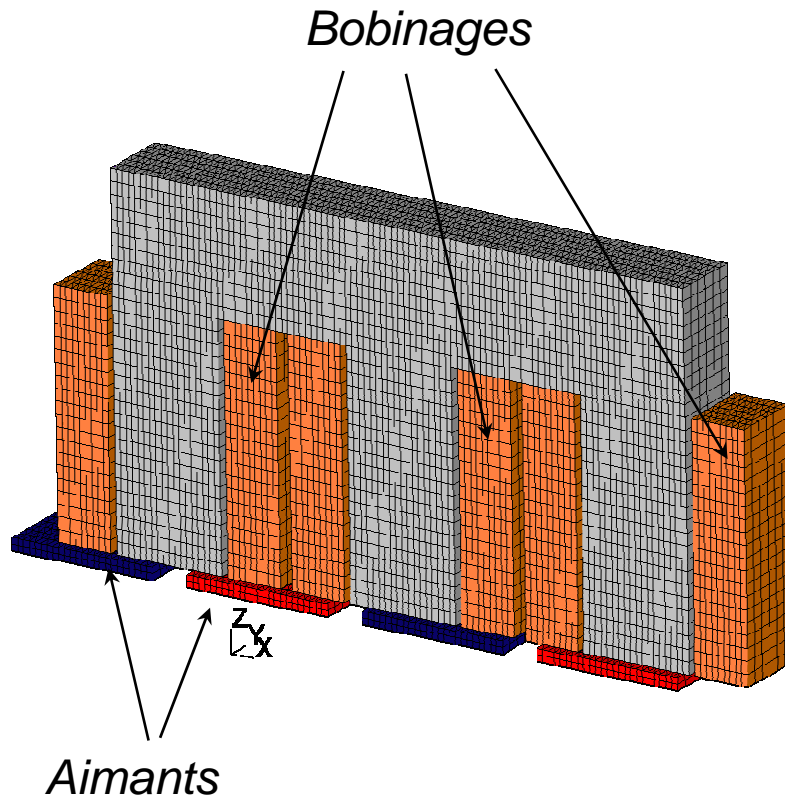
# Plan



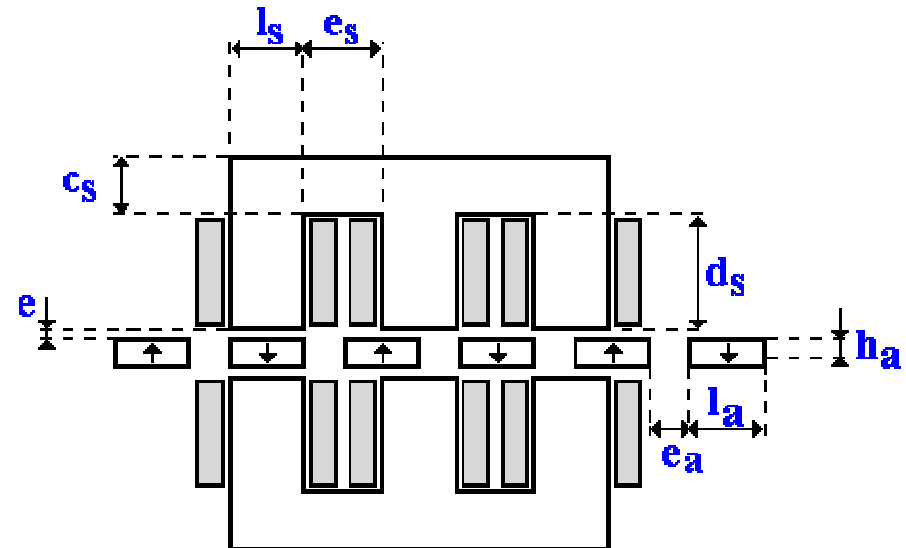
- Problème magnétostatique
- Problème magnétodynamique
- Exemples d'application
- Bilan

# Exemples d'application

- Actionneur linéaire (magnétostatique, formulation scalaire)



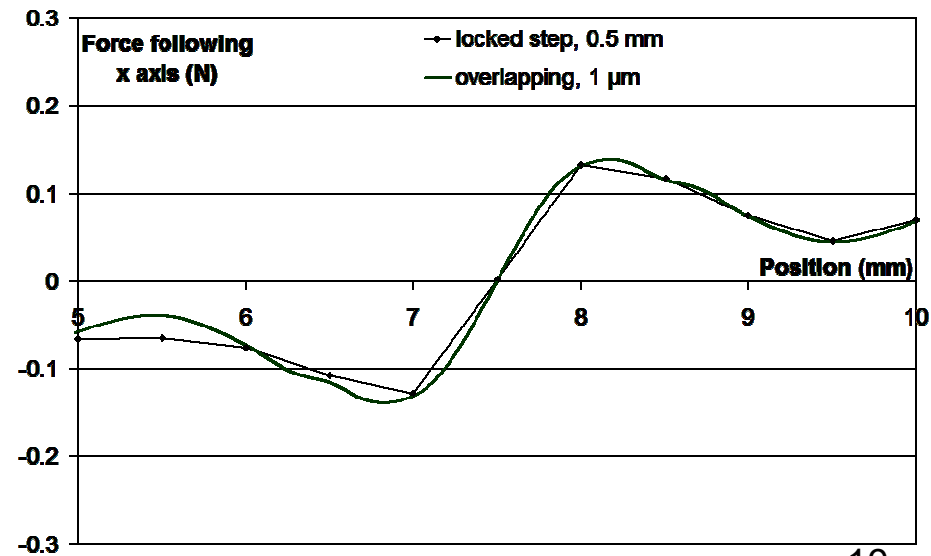
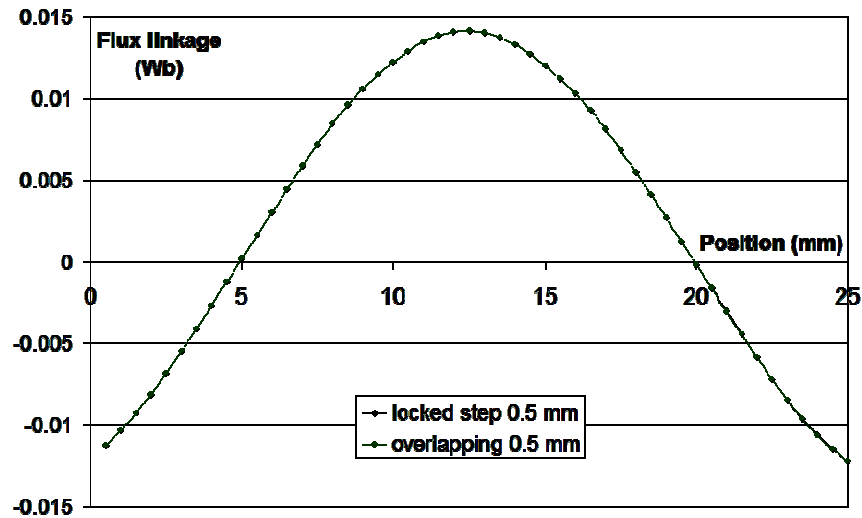
51839 prismes



<b>ls</b>	9 mm	<b>cs</b>	10 mm
<b>es</b>	11 mm	<b>e</b>	0.4 mm
<b>la</b>	12 mm	<b>ds</b>	20 mm
<b>ea</b>	3 mm	<b>ha</b>	3 mm

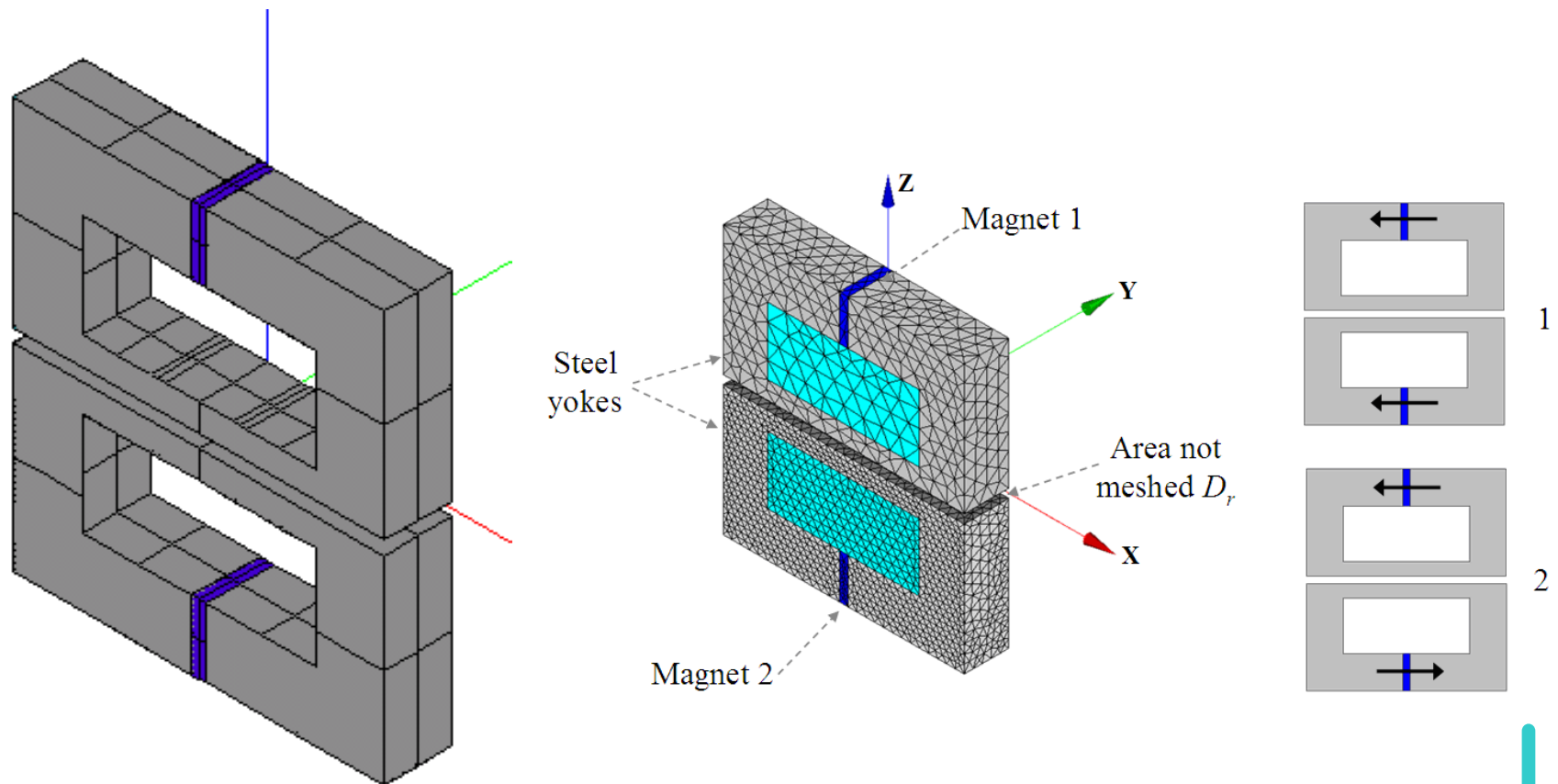
# Exemples d'application

## □ Actionneur linéaire (magnétostatique, formulation scalaire)



# Exemples d'application

## ❑ Système à aimants (magnétostatique)



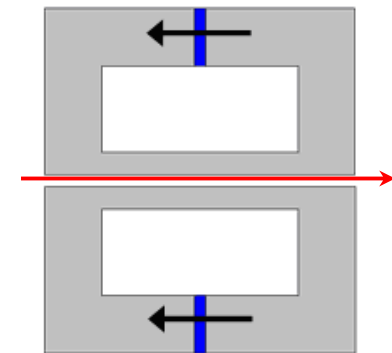
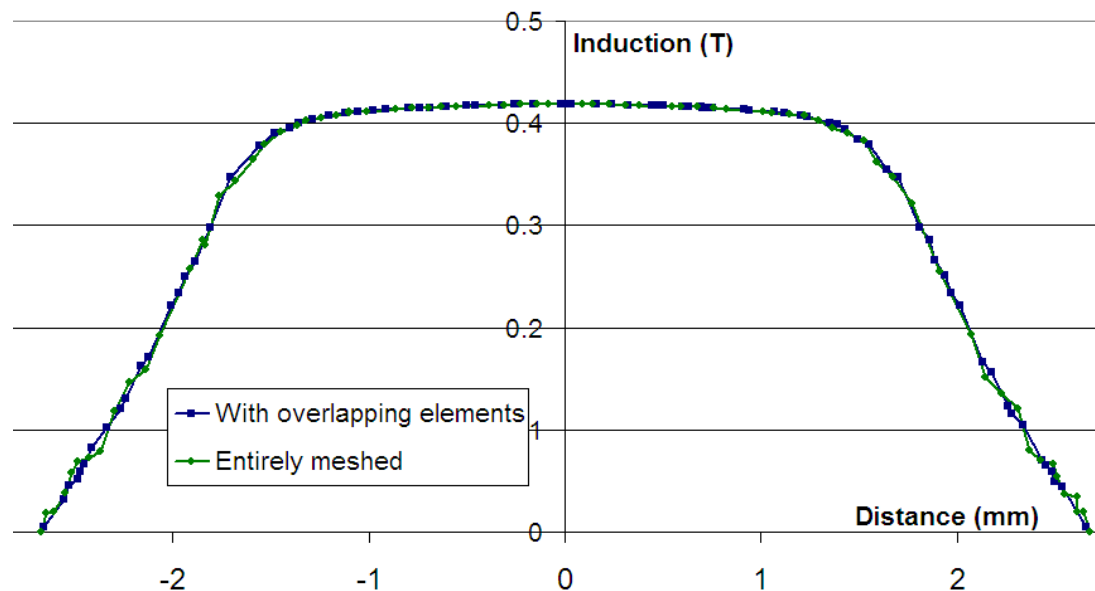
*Présentation du système*

# Exemples d'application

## ☐ Système à aimants (magnétostatique)

	Cas 1		Cas 2	
	Maillage complet	Maillage avec overlapping	Maillage complet	Maillage avec overlapping
Form. Scal.	4.6991E-7 J	4.6978E-7 J	7.7589E-8 J	7.8090E-8 J
Form. Vect.	5.0411E-7 J	5.0470E-7 J	8.2485E-8 J	8.2515E-8 J

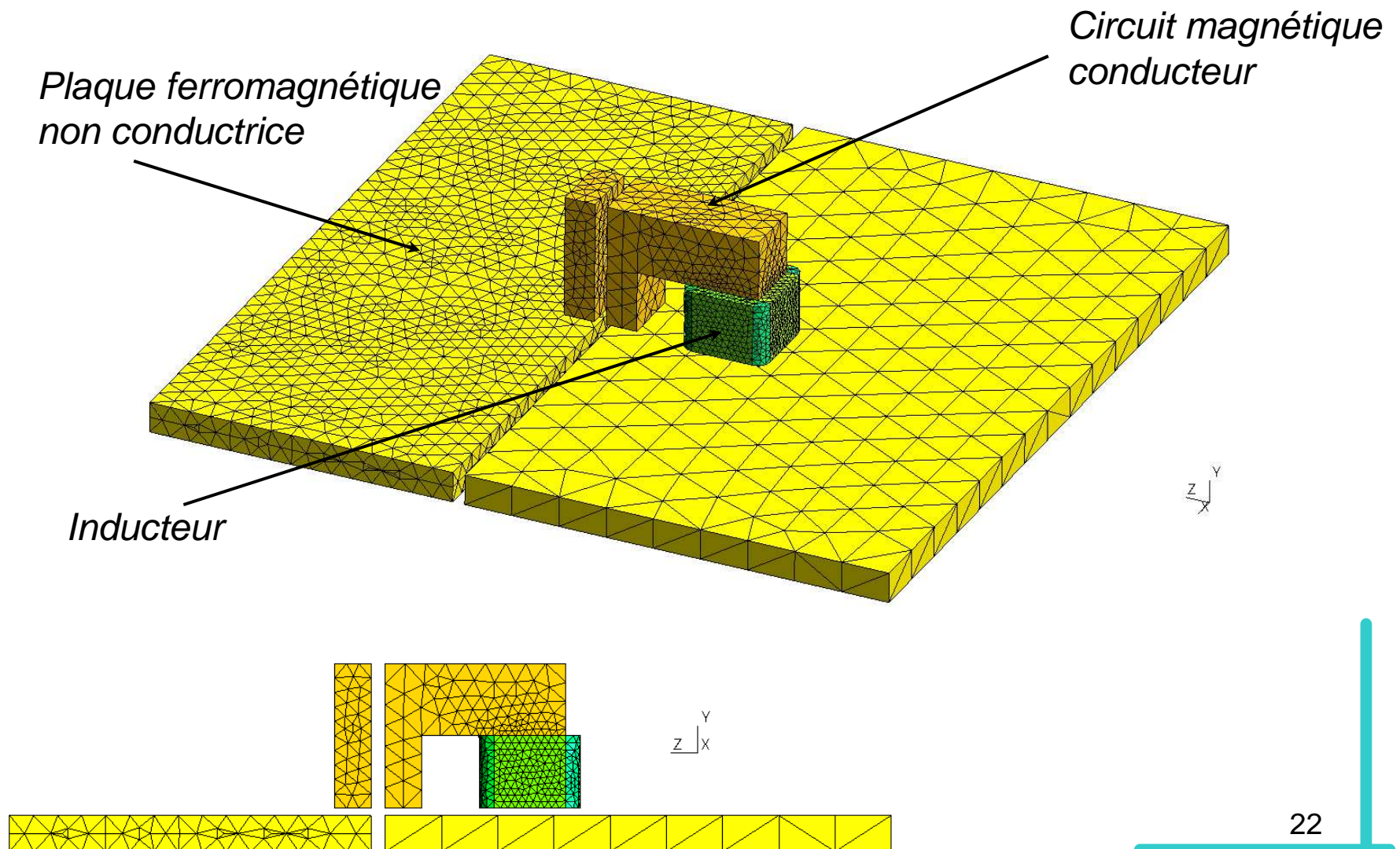
*Energie dans la zone d'Overlapping*



*Composante x de l'induction selon une ligne*

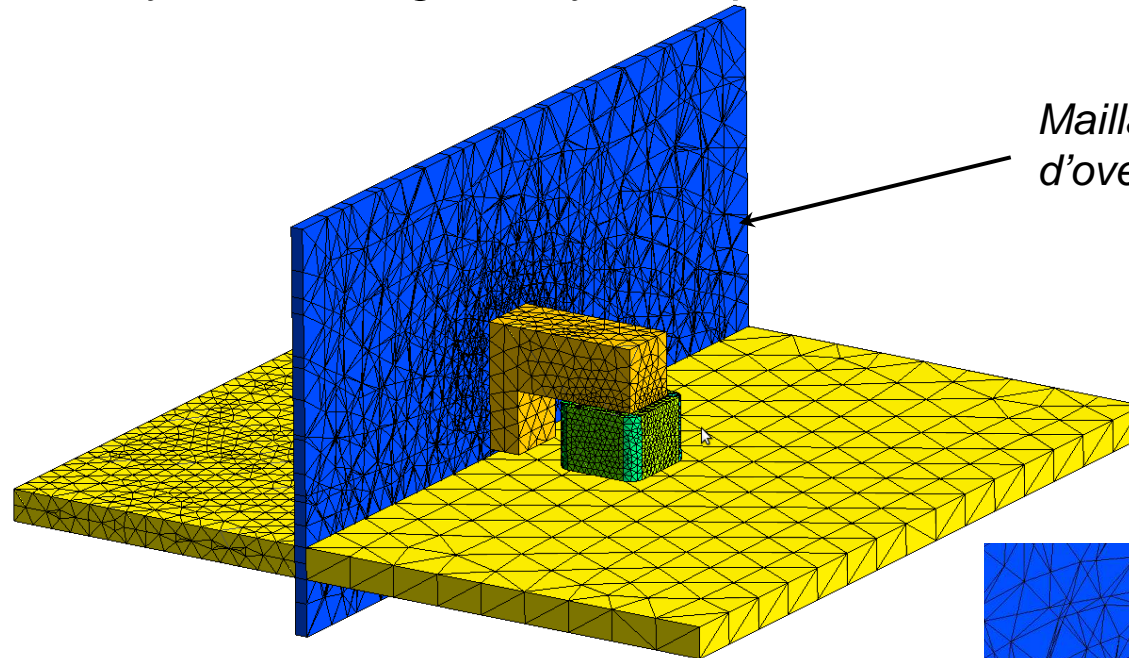
# Exemples d'application

## ☐ Système magnétodynamique

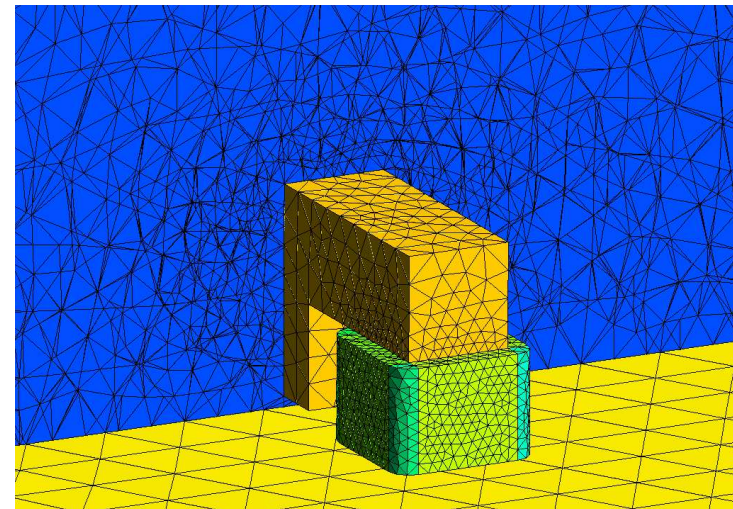


# Exemples d'application

## ☐ Système magnétodynamique

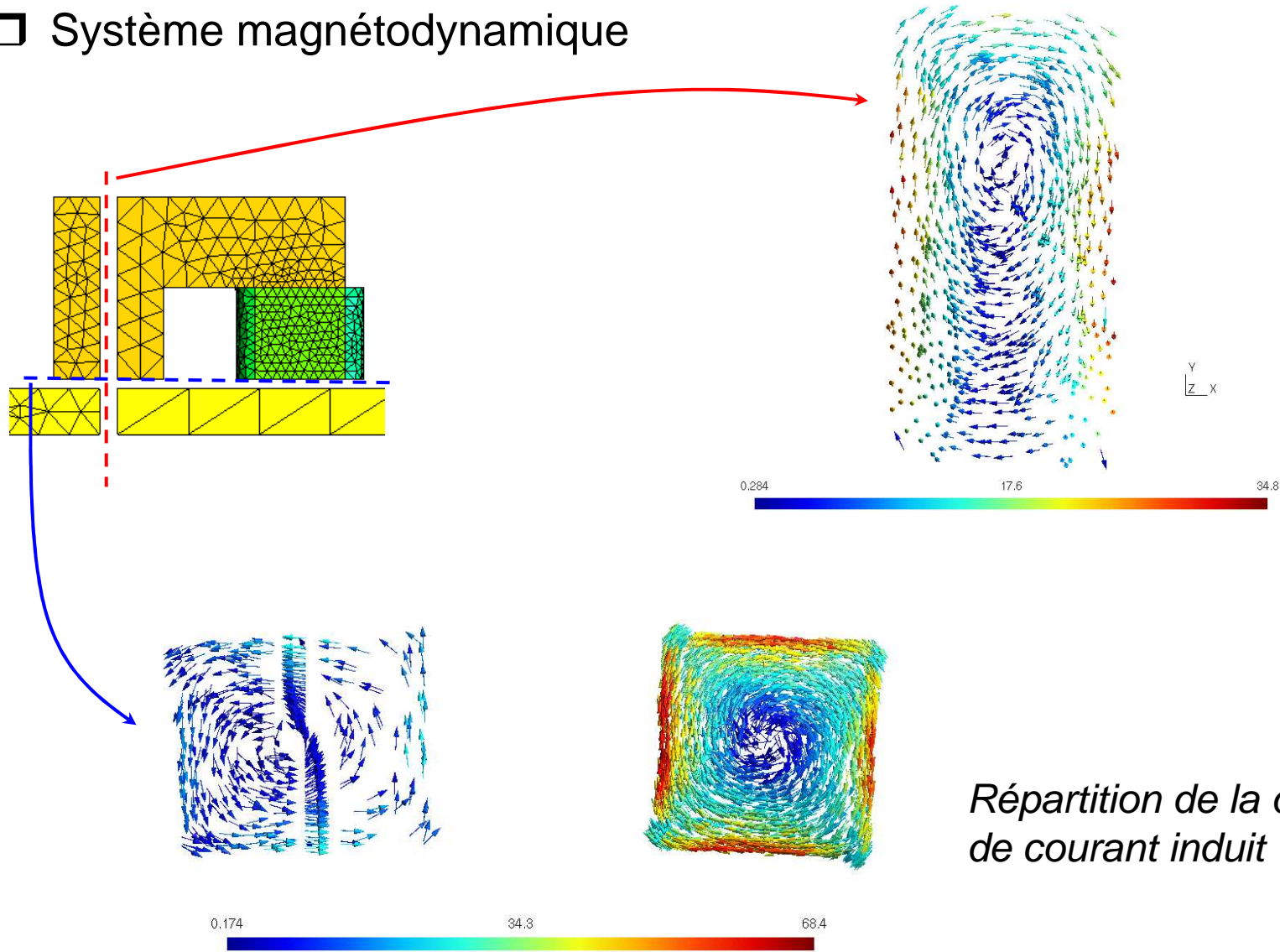


*Maillage de la zone d'overlapping*



# Exemples d'application

## ☐ Système magnétodynamique



*Répartition de la densité de courant induit*

# Plan



- Problème magnétostatique
- Problème magnétodynamique
- Exemples d'application
- Bilan

# Bilan

## ❑ Scientifique :

Mise à niveau de la méthode d'Overlapping (formulation)

## ❑ Publication :

*"Overlapping finite elements used to connect non-conforming meshes in 3D with a vector potential formulation"* IEEE transaction on magnetics, 2011  
(à l'origine présenté à CEFC2010)

*"Evaluation of the overlapping finite element method for taking into account very small displacements"* IGTE 2010

## ❑ Perspective :

Article de revue concernant une comparaison des méthodes